Exercice 1: Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1. Combien peut-on former de mots de p lettres (ayant un sens ou non) avec un alphabet de n lettres ?
2. Même question pour des mots ne comportant que des lettres distinctes ?
3. Un palindrome est un mot qui se lit de manière identique que ce soit de la gauche vers la droite ou de la droite vers la gauche (exemples : kayak, selles, ressasser). Combien peut-on former de palindromes de p lettres (ayant un sens ou non) avec un alphabet de n lettres ?

Exercice 2: Une course de chevaux comporte 20 partants.
Quel est le nombre de résultats possibles de tiercés :

1. dans l'ordre ?
2. dans le désordre ?

Exercice 3:
Combien y a-t-il d'anagrammes (ayant un sens ou non) du mot orange ? du mot ananas ? *Exemple : rongea est un anagramme du mot orange.*

Exercice 4: Soit $n \in [\![3, +\infty[\![$. Quel est le nombre de surjections :

1. de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;2]\!]$?
2. de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;3]\!]$?
3. de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;n]\!]$?

Exercice 5: Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules numérotées de 1 à 5 sont blanches, les boules numérotées de 6 à 15 sont noires.

1. On tire simultanément cinq boules de l'urne.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires ?
2. On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise.
   (a) En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires dans un ordre quelconque ?

Exercice 6: Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
Déterminer le nombre de diagonales dans un polygone convexe à n côtés.
Existe-t-il un polygone convexe admettant 3333 diagonales ?

Exercice 7: Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que E possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(X) = n2^{n-1}$.
   On pourra utiliser le changement de variable $Y = \overline{X}$
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}(X \cap Y) = n2^{2n-2}$.
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}(X \cup Y) = 3n2^{2n-2}$.

Exercice 8: Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère n droites dans le plan, que l'on suppose en position générale, ce qui signifie que :

- deux quelconques d'entre elles ne sont pas parallèles ;
- trois quelconques d'entre elles ne sont pas concourantes.

1. Calculer le nombre de points d'intersection que l'on obtient avec ces n droites.
2. Calculer le nombre de triangles formés à partir de ces n droites.

Exercice 9: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.

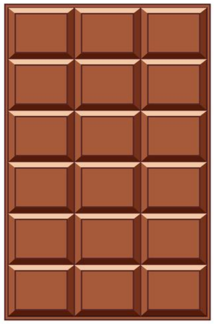
1. Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercice 10: *Série de Kempner.*
Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 0$ si n contient le chiffre 9 en base 10 et $\frac{1}{n}$ sinon. Soit $k \in \mathbb{N}$, posons $D_k = \{n \in [\![10^k; 10^{k+1}[\![, u_n \neq 0\}$.

1. Déterminer le cardinal de D_k.
2. Déterminer un majorant de $\{u_n, n \in D_k\}$.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{10^{m+1}} u_n \leqslant 10^{-m-1} + 8\sum_{k=0}^{m} \left(\frac{9}{10}\right)^k$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
4. Conclure quant à la nature de la série de Kempner : $\sum u_n$.

Exercice 11: *Dénombrer sans compter !*

1. Combien y-a-t-il de rectangles dans cette tablette de chocolat ?



2. Combien y-a-t-il de triangles dans cette figure ?